Rainer H. KAENDERS, TU Delft und Radboud Universität Nimwegen

Kräne und Lemniskaten

Einleitung. Kräne üben nicht nur durch ihre Nützlichkeit sondern auch in ihrer Ästhetik große Faszination auf Menschen aus. In den zwanziger und dreißiger Jahren des letzten Jahrhunderts entstand durch den aufkommenden Stahlbau eine Vielzahl immer neuer Krankonstruktionen, bei denen sich die transportierte Last auf einer horizontalen Bahn bewegt ([7], [5]). Nun ist *horizontal* für einen Ingenieur etwas anderes als für einen Mathematiker; tatsächlich erreichen manche Krankonstruktionen nur für die Praxis hinreichend horizontale Lastwege ('level luffing'). Schon bei *Turm- und Portalkränen* liegt dem horizontalen Lastweg eine zwar einfache aber nicht offensichtliche Idee zugrunde, die oft mit einem Flaschenzug kombiniert wird. Krankonstruktionen wie der *Einziehdrehkran mit Ellipsensteuerung* – im folgenden kurz *Ellipsenkran* genannt – erreichen ihren horizontalen Lastweg auf besonders elegante Weise, wie mithilfe elementarer Geometrie erklärt werden kann. Mathematisch besonders interessant wird es beim *Einziehdrehkran mit Lemniskatenlenker* oder *Floating lemniscate crane* – im folgenden kurz *Lemniskatenkran* genannt.

Hier soll ein relevanter und tatsächlich vorkommender Kontext skizziert werden, der das Studium und die Anwendung von zugrundeliegenden geometrischen Konzepten fördern und motivieren kann. Dieser Kontext bietet eine reiche Quelle interessanter geometrischer Fragestellungen auf jedem Niveau und kann daher an verschiedenen Stellen im Unterricht herangezogen werden. Im Gegensatz zu Kontexten, die speziell für die Schule geschaffen wurden, setzen Ingenieure diese Anwendung von Geometrie wirklich ein, wie man zum Beispiel in jedem großen Hafen sieht.

Es gibt die folgenden Unterrichtserfahrungen zu diesem Thema: zwei halbjährliche Schülerkurse an der Universität Nimwegen (2003 und 2004), *wiskunde b-dag 2004* des Freudenthal Instituts [12], CWI Ferienkurs für Mathematiklehrer 2005 [6], Erfahrungen des Autors am Canisius College Nimwegen (9. Schuljahr und 'profielwerkstuk'). In diesem Jahr ist ein Schülerkurs im internationalen Känguruh Mathe-Camp in Eberswalde geplant (einschließlich Besuch bei [8]).

In diesem kurzen Beitrag möchten1wir beispielhaft den Reichtum dieses Kontexts verdeutlichen. Dies tun wir anhand der Konstruktion des Parallelkrans und der Lage der Doppelpunkte von Koppelkurven mit denensprechenden Folgerungen für Kräne. Weitere Beispiele, Hintergründe und Literaturangaben finden sich in [6] (siehe auch [13]).

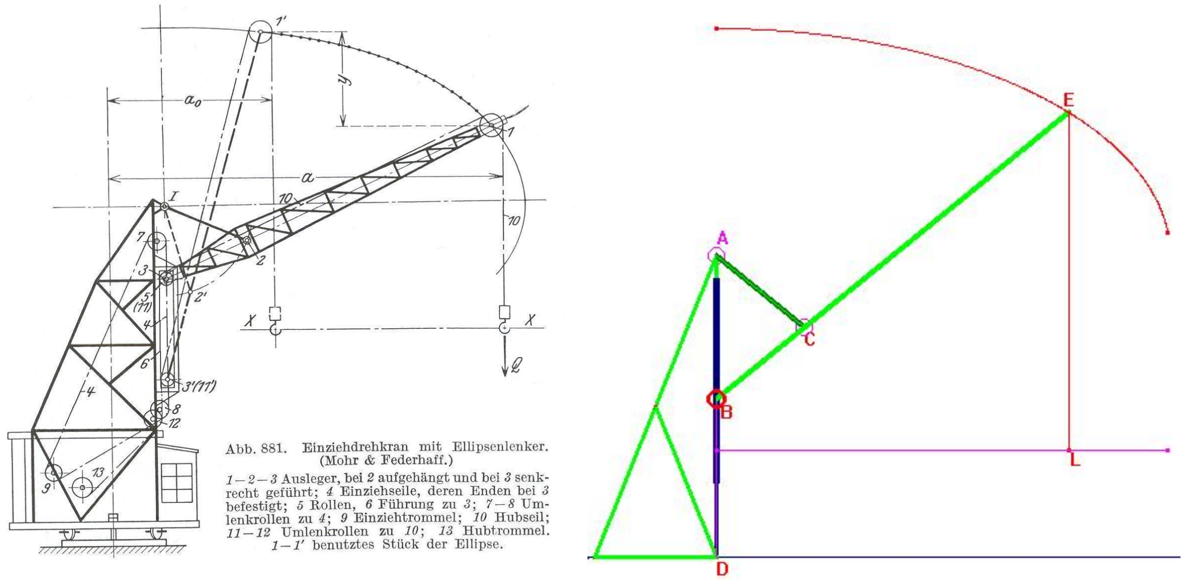

Abbildung 1. Einziehdrehkran mit Ellipsenlenker. Technische Zeichnung aus [5] und *applet* aus [12]. Punkt B bewegt auf und ab und es gilt: $/AC/=/BC/=\frac{1}{4}/BE/$. Das Seil verläuft entlang von D-B-E-L.

Hintergrund. In den Niederlanden hat die zuständige Ministerin im Jahr 2005 in den vier mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern und der Informatik sogenannte *Erneuerungskommissionen* zur Erstellung neuer Lehrpläne für das Jahr 2010 eingesetzt. Das verbindende Element dabei soll die sogenannte 'Kontext-Konzept Herangehensweise' (siehe z.B. [3]) sein. Für uns in der Mathematikkommission [9] fallen – nach jahrelanger allzu großzügiger Interpretation von 'Realistic Mathematics Education' – sicherlich auch rein mathematische Kontexte, wenn sie für die Schüler Bedeutung haben und sich durch vielfältige Beziehungen zu anderen, eventuell ebenfalls mathematischen, Kontexten auszeichnen, unter den hier gemeinten Kontextbegriff. Neben diesen sollen aber auch den Schülern vertraute praktische und angewandte Kontexte eine Rolle spielen. Der Kontext *Kräne mit horizontalem Lastweg* bietet hierfür beispielhaft fachlich sinnvolle Möglichkeiten.

Ellipsenkran. Der *Ellipsenkran* ist eine Krankonstruktion, die in den unteren Klassen der Sekundarstufe als wirkliche Anwendung elementarer Geometrie betrachtet werden kann. Wir überlassen es dem Leser, anhand der Abbildung 1 herauszufinden, warum bei dieser Konstruktion, die Last am Ende des Seils mathematisch horizontal verläuft.

Gelenkvierecke und Koppelkurven. Das Studium von Gelenkvierecken ist wiederholt für den schulischen Mathematikunterricht vorgeschlagen und realisiert worden (siehe etwa [4], [1] oder [11]). Hieran kann die Betrachtung sogenannter *Koppelkurven* angeschlossen werden. Dabei handelt es sich um Kurven die entstehen, wenn man ein Gelenkviereck M-Q-B-A gegeben hat, bei dem die Punkte M und Q fest montiert sind (*Pivotpunkte*), und man dann die Spur eines relativ zu den Punkten A und B festen Punktes C betrachtet.

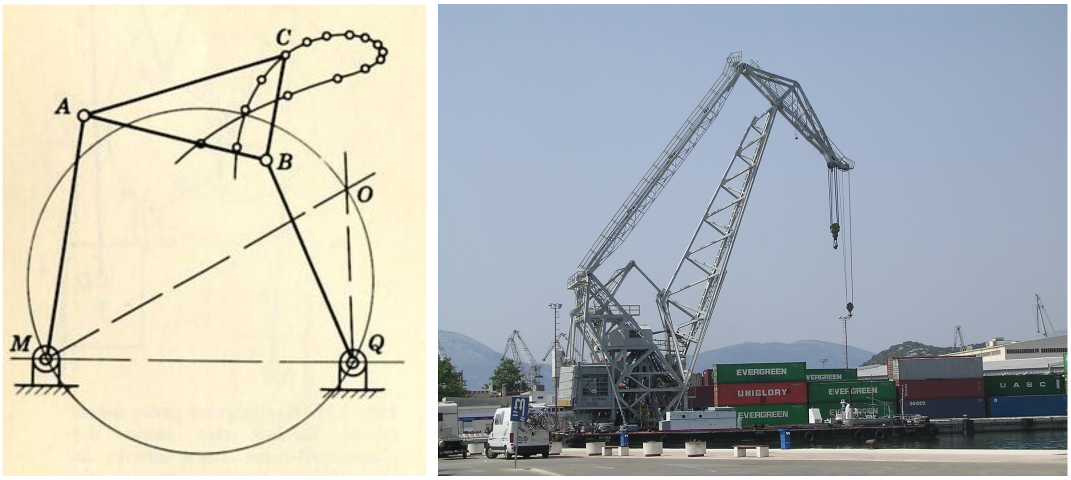

ABBILDUNG 2. Pivotkreis und Lemniskatenkran (Foto Fred Muijrers)

Man kann sich C als die Spitze eines Dreiecks $\triangle ABC$ vorstellen, das fest mit der sogenannten *Koppelstange* (das ist die Stange AB) verbunden ist und sich mit der Koppelstange bewegt. (siehe Abbildung 2)

Auch eine solche allgemeine Klasse von Kurven ist noch zugänglich für elementare Geometrie. Bestimmt man zum Beipiel den Punkt O, bei dem das Dreieck $\triangle MQO$ dem Dreieck $\triangle ABC$ ähnlich ist, dann nennt man den Umkreis des Dreiecks $\triangle MQO$, den *Pivotkreis*. Ein elementarer geometrisch zu beweisender Satz besagt, dass die Doppelpunkte einer Koppelkurve, falls vorhanden, sich immer auf diesem Pivotkreis befinden.

Lemniskatenkran. Bei einer grossen Klasse von Kränen, den *Lemniskatenkränen*, beschreibt die bewegte Last eine solche Koppelkurve. (Bei manchen Wippkränen auch die Seilausgleichsrolle.) Hierbei handelt es sich meistens um Koppelkurven, bei denen das Dreieck $\triangle ABC$ zu einer Strecke (und der Pivotkreis zu einer Geraden) degeneriert ist. Die klassische *Lemniskate von Bernoulli* kann gleich auf zwei Arten und Weisen als eine solche Koppelkurve konstruiert werden. Gelenkvierecke, Koppelkurven und damit auch die Lastwege von Lemniskatenkränen bieten unzählige Anknüpfungspunkte für 'höhere Mathematik'. Zum Beispiel kann man Gelenkvierecke mittels der sogenannten *Darbouxabbildung* [2] mit der Theorie komplex projektiver kubischer Kurven in Verbindung bringen, deren elementare Eigenschaften sich direkt auf Eigenschaften der Gelenkvierecke übertragen.

Kontext-Konzept bei Kränen mit horizontalem Lastweg. Die Fragestellung nach einem horizontalen Lastweg ist eine für jeden Schüler nachvollziehbare mathematische Frage. Viele Konstruktionen für solche Kräne (siehe etwa [7]) bieten interessante und nicht-triviale Beispiele zur Verwendung im Mathematikunterricht auf unterschiedlichen Niveaus. Dieser Kontext ist offen für eigene Kreativität von Schülern. Es ergeben sich sinnvolle Anwendungen von dynamischer Geometriesoftware und Computeralgebra. Der Kontext bietet zudem die Möglichkeit zu immer tieferen Einsichten von elementar- und

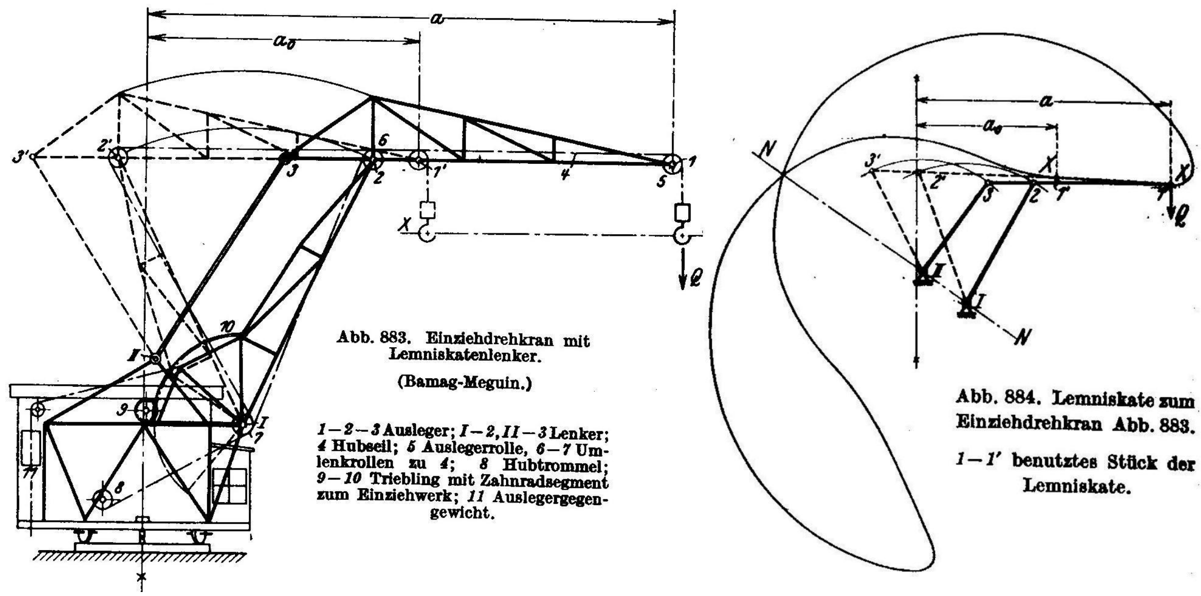

Abbildung 3. Einziehdrehkran mit Lemniskatenlenker

differentialgeometrischer, kinematischer, mechanischer und sogar algbraisch geometrischer Art. Etwa in der Lehrerausbildung eingesetzt kann er helfen, das Zusammenspiel verschiedener mathematischer Disziplinen in einem auch für Schüler interessanten Kontext kennen zu lernen. Ein Kontext wie dieser kann zur mathematischen Entwicklung beitragen. Zu seinem Verständnis muss man jedoch immer anderswo erworbene geometrische Erfahrung mitbringen.

Literatur

[1] M.G. Bartolini Bussi, M. Pergola (1996). *History in the Mathematics Classroom: Linkages and Kinematic Geometry*, in: History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences, H.N. Jahnke, N. Knoche, M. Otte (Eds.), Studien der Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, 11, 39-67.

[2] M.G. Darboux (1879). *De lémploi des fonctions hyperelliptiques dans la théorie de quadrilatère plan*, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, Gauthiers-Villars, Paris, 109-128.

[3] H.P.W. Driessen, H.A. Meinema (2003). *Chemie tussen context en concept*, Enschede, Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO).

[4] A. Engel (1971). *Geometrical Activities for the Upper Elementary School*, Educational Studies in Mathematics, 3, 353-394.

[5] R.Hänchen (1932). *Winden und Krane, Aufbau, Berechnung und Konstruktion.* Verlag Julius Springer, Berlin.

[6] R.H. Kaenders (2005). *Kranen en Lemniscaten* , in *De schijf van vijf (Meetkunde – Algebra – Analyse – Discrete wiskunde – Stochastiek)*, Syllabus CWI vakantiecursus, 54, 31–59 (erhältlich unter http://www.cwi.nl/).

[7] G. Niemann(1928). *Über Wippkrane mit waagerechtem Lastweg*, Dissertation Technische Hochschule Berlin.

Webseiten

[8] KE Kranbau Eberswalde, http://www.kranbau-eberswalde.de/ (ehemals ARDELT Werke).

[9] Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO), http://www.cTWO.nl.

[10] FIGEE crane building, Haarlem, http://www.figee.com/.

[11] Ratio Instituut en Internetmethode, http://www.ratio.ru.nl/, Radboud Universiteit Nijmegen.

[12] Wiskunde-B-dag (2004). *Dansende Stangen*, http://www.fi.uu.nl/wisbdag, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

[13] Homepage des Autors: http://www.ils.kun.nl/ R.Kaenders.